授業研究では，平成３１年度の学力学習状況調査の数学$\boxed{9}$の類題を作り授業実践した。
本時で配布した「これまでの学習」プリントの内容を指導するときには，言葉の式を使って，

(偶数)×(次の偶数)＋１＝(奇数)の２乗
→　(偶数)×(偶数＋２)＋１＝(奇数)^2
→　$2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$

というような流れで，証明すべき内容を確認した。

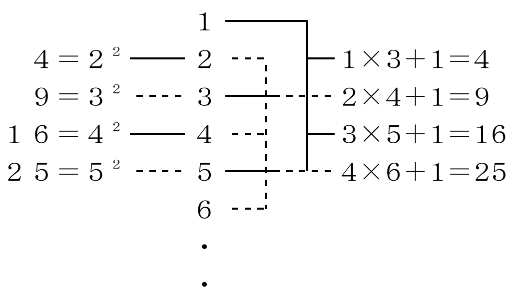
１．授業のねらい

平成３１年度の学力学習状況調査の数学$\boxed{9}$の流れに倣って，数の性質を発展的に考え，新しい性質を見つけ出し，証明していく授業を行った。その過程で，次のようなことを意図して授業を行った。
数学的表現力の育成については，見つけた性質を各自が文章表現し，そのあと班で修正し，クラス全体で修正していくという過程を通して，正確に表現する力をつける。特に「～は～である」という文体にさせることで，仮定と結論を明確にする。表現することを経て読み取るもついていくであろうと考える。また，文章表現と式表現の間では，言葉の式を作ることで式の意味を理解する力をつる。
証明の表記方法を各自が確認できるように，元となる性質を証明した「これまでの学習」というプリントをはじめに配布した。

２．本時の指導

(１) 目標
・数についての性質が成り立つことを文字を用いて一般的に説明できる。(数学的な見方や考え方)
・目的に応じて，式を変形できる。(数学的な技能)
・整数の性質を言葉で表現できる。(数量や図形などについての知識･理解)

(２) 展開

<table>
<tr><th>学習過程</th><th>時配</th><th>学　習　活　動　と　内　容</th><th>留意点(○)および評価(◇)</th></tr>
<tr><td>問題把握</td><td>10</td><td>○これまでの学習の確認
①「連続する２つの偶数の積に１をたした数は，その２つの偶数の間の奇数の２乗になる。」
②「連続する２つの奇数の積に１をたした数は，その２つの奇数の間の偶数の２乗になる。」
これらの性質とその証明を確認する。

</td><td>○事前に学習した内容・証明のプリントを配布して確認させる。また，ノートでも確認させる。

○数値でも確認させる。

◇プリントやノートで，証明の仕方を振り返ることができたか。
◇内容通りに数で計算できているか。</td></tr>
</table>

自力解決	5	偶数・奇数の性質を合わせて考え，新しい性質を見つけて，証明しよう。 ○実際に整数をいくつか書き出して，「合わせた性質」見つけ，言葉で表す。	○文章が，「～は，～である。」の形になるようにさせる。 ◇新しい性質を見つけようとしているか。 ◇正確な文で表現できているか。
比較検討	20	○各自が見つけた性質を文で書く ○班で伝え合って，班で一つの文にまとめる ○学級で性質を表す文を一つにまとめる。 ・「連続する 3 つの整数の最も小さい数と最も大きい数の積に 1 をたした数は，まん中の数の 2 乗になる」 ○証明すべき内容を言葉の式で書く 連続する 3 つの整数で ・(最小の数と最大の数の積に 1 をたした数)=(まん中の数)^2 ・(最小の数)×(最大の数)＋1＝(まん中の数)^2 ・(最小の数)×(最小の数＋2)＋1＝(最小の数＋1)^2 ・(まん中の数－1)×(まん中の数＋1)＋1＝(まん中)^2 など ○偶数や奇数の場合の証明を参考に証明する。 ＜証明１＞ 連続する 3 つの整数のうち，最も小さい数をｎとすると 連続する３つの整数は， ｎ，ｎ＋１，ｎ＋２　と表される。 最も小さい数と最も大きい数の積に 1 を足した数は $n(n+2)+1=n^2+2n+1$ $=(n+1)^2$ ｎ＋１は，真ん中の整数だから， 連続する 3 つの整数の最も小さい数と最も大きい数の積に 1 をたした数は，まん中の数の 2 乗になる ＜証明２＞ 連続する 3 つの整数のうち，まん中の数をｎとすると 連続する３つの整数は， ｎ－１，ｎ，ｎ＋１　と表される。 最も小さい数と最も大きい数の積に 1 を足した数は $(n-1)(n+1)+1=n^2-1+1$ $=n^2$	○より正確な文になるように，全員で検討させる。 ○電子黒板で，入力した文を修正意見に合わせて修正ながら練り上げていく。 ○異なる性質を見つけた生徒にも発表させて，本時では扱わないが，課題とすることを伝える ◇言葉の式で表現できているか ○式化しやすいようなことばの式を考えさせる ○式化するには，基準の数を決めて表すとよいことに気づかせる ○連続３つの整数を式化できない生徒には，差が１であることに気づかせる。 ◇何をｎとするか明確になっているか ◇式の変形が適切にできているか ○式の変形にミスがある場合は，机間指導で個別に指導する。 ◇証明の中で，式ついての説明がきちんと書かれているか。

		nは，真ん中の整数だから， 連続する3つの整数の最も小さい数と最も大きい数の積に1をたした数は，まん中の数の2乗になる ○班でお互いの証明の仕方を検討し，足りないところなどを修正する。 ○証明を発表する。	 ◇互いに証明を理解しようとしているか。 ○何通りかあった場合は，すべてを発表させる。
適応問題	5	「連続した5つの整数」では，どのような性質になるだろうか予想しよう ・「連続する5つの整数の最も小さい数と最も大きい数の積に4をたした数は，まん中の数の2乗になる」 ○予想とその根拠を発表する。	
まとめ	5	・似たような性質を合わせて考えると新しい性質が見つかる。 ・一部を変えると新しい性質が見つかる ・証明では，何を文字でおくかで式変形が変わる	○偶数個の場合についても触れて，各自の課題とする。 ○連続する m 個の整数について証明できると，一般化できることにも触れる。

＜授業で使用したプリント１＞

－－－

これまでの学習

① 連続する2つの偶数の積に1をたした数は，その2つの偶数の間の奇数の2乗になる。

＜証明＞

nを整数とすると

連続する２つの偶数は，　$2n$，$2n+2$　と表される。

それらの積に１をたした数は，

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$
$$=(2n+1)^2$$

$2n+1$ は，その２つの偶数の間の奇数だから

連続する２つの偶数の積に１をたした数は，その２つの偶数の間の奇数の２乗になる。

② 連続する2つの奇数の積に1をたした数は，その2つの奇数の間の偶数の2乗になる。

＜証明１＞

nを整数とすると

連続する２つの奇数は，　$\underline{2n+1，2n+3}$　と表される。

それらの積に１をたした数は，

$$(2n+1)(2n+3)+1=4n^2+8n+4$$
$$=(2n+2)^2$$

２ｎ＋２ は，その２つの奇数の間の偶数だから
連続する２つの奇数の積に１をたした数は，その２つの奇数の間の偶数の２乗になる。

＜証明２＞
ｎを整数とすると
連続する２つの奇数は， ２ｎ－１，２ｎ＋１ と表される。
それらの積に１をたした数は，

$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2$

$=(2n)^2$

２ｎ は，その２つの奇数の間の偶数だから
連続する２つの奇数の積に１をたした数は，その２つの奇数の間の偶数の２乗になる。

－－

＜授業で使用したプリント２＞

－－

＜＜今日の学習＞＞ ３年 組 番 氏名

偶数･奇数の性質から，新しい性質を見つけて証明しよう

1 ①と②の性質を数値で確認しよう

１ ２ ３ ４ ５ ６ ７ ８ ・・・・

2 見つけた性質を文で表してみよう。

＜自分の考えた性質＞

＜班で考えた性質＞

＜クラス全体で考えた性質＞

3 ことばの式で表そう

4 証明しよう

－－

＜授業の反省＞
新しい性質を文にするところに時間がかかってしまって，適応問題まで進めることができなかった。
新しい性質を見つけるというより，問題の条件替えとして捉えて，新しい問題を作っていく方がスムーズに進んだかもしれない。（発展的に考える）

３．検証問題による結果分析

事前調査検証問題　　平成２７年Ｂ２(２)

連続する３つの整数の和がどんな数になるかを調べます。

　１，　２，　３　のとき　　　１+ ２+ ３＝ ６＝３× ２

　３，　４，　５　のとき　　　３+ ４+ ５＝１２＝３× ４

１０，１１，１２　のとき　１０+１１+１２＝３３＝３×１１

これらの結果から，次のように予想できます。

予想

連続する３つの整数の和は，中央の整数の３倍になる。

次の（１）から（３）までの各問いに答えなさい。

（１）省略

（２）上の**予想**がいつでも成り立つことを説明します。下の**説明**を完成しなさい。

説明

連続する３つの整数のうち最も小さい整数をn とすると，
連続する３つの整数は，ｎ，ｎ＋１，ｎ＋２ と表される。
それらの和は，

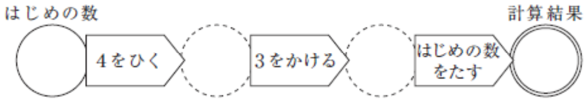
ｎ＋(ｎ＋１)+(ｎ＋２) ＝

事前調査結果　◎・○であった生徒の割合　　全国　４２％　　本校　５２％　（全国より１０％高い）

事後調査検証問題１　平成３０年Ｂ２(２)

2 次の**図１**のように，はじめの数として◯に整数を入れて計算し，計算結果を求めます。

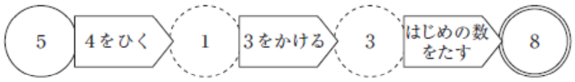
図１



海斗さんは，はじめの数として◯にいろいろな整数を入れて計算しています。例えば，はじめの数が5，6，−1のときは，それぞれ下のような計算になります。

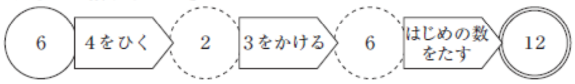
計算の例

はじめの数が5のとき



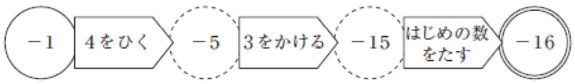
計算結果は8になる

はじめの数が6のとき



計算結果は12になる

はじめの数が−1のとき



計算結果は−16になる

（２）海斗さんは，前ページの**計算の例**の計算結果がどんな数になるかを調べています。

調べたこと

5	のとき	$8 = 4 \times 2$
6	のとき	$12 = 4 \times 3$
−1	のとき	$-16 = 4 \times (-4)$

海斗さんは，上の**調べたこと**から，はじめの数としてどんな整数を入れて計算しても，計算結果はいつでも4の倍数になると予想しました。

はじめの数が３のときは，
計算結果は０になる。
$0 = 4 \times 0$ なので，
このときも４の倍数になっている。

「はじめの数としてどんな整数を入れて計算しても，計算結果はいつでも4の倍数になる」という海斗さんの予想が成り立つことの説明を完成しなさい。

説明

はじめの数として入れる整数を n とすると，計算結果は，

$(n-4) \times 3 + n =$

事後調査結果　◎・○であった生徒の割合　　全国　４０％　　本校　５７％　（全国より１７％高い）

事後調査検証問題２　平成３１年９(２)

拓斗さんと若菜さんは，連続する３つの奇数の和がどんな数になるかを調べています。

１，　３，　５	のとき	１+　３+　５　＝　９＝　３×　３
５，　７，　９	のとき	５+　７+　９　＝２１＝　３×　７
１３，１５，１７	のとき	１３+１５+１７　＝４５＝　３×１５

拓斗さんは，これらの結果から次のことを予想しました。

予想１

連続する３つの奇数の和は，中央の奇数の３倍になる。

上の**予想１**がいつでも成り立つことは，次のように説明できます。

説明１

n を整数とすると，連続する３つの奇数は，
$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$ と表される。
それらの和は，

（２n+１）+（２n+３）+（２n+５）
＝２n+１+２n+３+２n+５
＝６n+９
＝３（２n+３）
２n+３は中央の奇数だから，３（２n+３）は中央の奇数の３倍である。
したがって，連続する３つの奇数の和は，中央の奇数の３倍である。

次の（１）から（３）までの各問いに答えなさい。
（１）省略
（２）二人は，連続する４つの奇数や５つの奇数の和について考えることにしました。
若菜さんは，連続する５つの奇数には中央の奇数があることから，中央の奇数に着目して連続する５つの奇数の和について調べました。
１，３，５，７，　９ のとき　1+3+5+7+　9＝２５＝ ５×５
３，５，７，９，１１ のとき　3+5+7+9+１１＝３５＝ ５×７
若菜さんは，これらの結果から次のことを予想しました。
予想２

連続する５つの奇数の和は，中央の奇数の５倍になる。

上の**予想２**がいつでも成り立つことを説明します。下の**説明２**を完成しなさい。

説明２

n を整数とすると，連続する５つの奇数は，
２n ＋１，２n ＋３，２n ＋５，２n ＋７，２n ＋９と表される。
それらの和は，

（２n ＋１）＋（２n ＋３）＋（２n ＋５）＋（２n ＋７）＋（２n ＋９）
＝

事後調査結果　◎・○であった生徒の割合　　全国　６０％　　本校　７５％　（全国より１５％高い）

記述式の問題で，事前調査と事後調査の正答率を全国平均との差で比較すると
事前調査　＋１０％　＜　事後調査１　＋１７％　，　事後調査２　＋１５％　であった。
また，無解答数は
事前調査　１０名　＞　事後調査１　５名　，　事後調査２　４名　であった。

多少ではあるが，正答率の向上がみられる。無解答者人数が減ったことは，大きな進歩であると考えられる。
事後調査２(Ｈ３１)では，例がある問題なので無解答者数が下がったとも考えられるが，事後調査１(Ｈ３０)でも無解答率が下がっていることから，少なくとも「文字を使って説明する」ことを理解した生徒が増えていると考えられる。

言葉や用語にこだわって，問題文(命題)づくりをしたり，言葉の式を作ってから文字の式にしたことは，多少の効果があったと考えられる。

例１　「連続する２つの偶数の積に１をたした数は，奇数の２乗になる」

＜仮定＞連続する２つの偶数の積に１をたした数　　＜結論＞奇数の２乗になる

（偶数）×（次の偶数）＋１＝（奇数）の２乗

（偶数）×（偶数＋２）＋１＝（奇数）^{2}

$$2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$$

例２　「」

道の面積＝センターラインの長さ×道幅